

TEORIJA VAN HIELE-OVIH O RAZUMJEVANJU GEOMETRIJE¹

Danijela Bilbija, Jovanka Milanković, Nikola Runjić i
Daniel A. Romano²

Prirodno-matematički fakultet, 78000 Banja Luka
Mladena Stojanovića 2, Bosna i Hercegovina

Sažetak

Holandanin Pierre van Hiele koji je doktorirao 1957. godine na univerzitetu Utrecht u Holandiji, u svojoj doktorskoj disertaciji³ i u članku⁴ koji je izašao dvije godine ranije, iznio je teoriju o nivoima mišljenja kroz koje se prolaze pri učenju geometrije. Njegova žena, Dina van Hiele-Geldof, je iste godine, u svojoj doktorskoj disertaciji⁵, pisala o istoj teoriji. Ubrzo zatim, Dina je umrla, a njen muž je nastavio da razradjuje njihovu teoriju, i 1986, on je izdao knjigu koja je nosila naziv *Structure and insight, a theory of mathematics education*⁶.

Njihova teorija je objašnjavala zašto veliki broj učenika ima problema u toku kursa geometrije, narocito sa izvođenjem formalnih dokaza, i davala nekoliko predloga da se što lakše ovi problemi izbjegnu.

Osnovna razlika u njihovim izlaganjima ogledala se u tome što je Pierre, uglavnom, pokušavao da otkrije razlog lošeg uspjeha učenika u učenju

¹ Tekst ovog rada je kompilacija seminarskih radova o geometrijskom mišljenju studenata Danijele Bilbija, Jovanke Milanković i Nikole Runjića.

² Nastavnik na predmetu Metodika nastave matematike

³ P.M. van Hiele, (1957). *The Problem of Insight, in Connection With School-children's Insight Into the Subject Matter of Geometry*. English summary (by P.M. van Hiele) of De Problematiek van het Inzicht Gedemonstreed wan het Inzicht von Schoolkindren in Meetkundeleerstof. Doctorial dissertation, University of Utrecht.

⁴ P M. van Hiele, (1956). *The child's thought and geometry*, trans. by R. Tischler. Bulletin de l'association des professeurs de mathematique de l'enseignement public, 38^e annee N^o 198, pp. 1-10.

⁵ D. van Hiele-Geldof, (1957). *The Didactics of Geometry in the Lower Class of the Secondary School*. English summary (by Dina van Hiele-Geldof) of De didaktiek van de Meetkunde in de eerste klass van het V.H.M.O. Doctorial dissertation, University of Utrecht.

⁶ P.M. van Hiele, (1986). *Structure and insight, a theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.

geometrije, dok je Dina pokušavala da dođe do nekih konkretnih metoda u nastavi koje bi omogućile prevazilaženje tih problema.

Oni su smatrali - da postoji pet diskretnih nivoa mišljenja, kroz koje se prelazi na putu ka sticanju sposobnosti da se izvode formalni dokazi, i razumije i geometrija koja ne pripada Euklidskoj geometriji.

Na svakom sljedećem nivou, usvajaju se nova znanja, a da bi se dostigao sljedeći nivo, potrebno je savladati prethodni. To zavisi isključivo od učenja i usvajanja određenog gradiva, a ne samo od čitanja i memorisanja.

Takođe, oni su smatrali, da životna dob ne utiče na prelazanje na sljedeći nivo; postoje ljudi koji su ostali na početnom nivou tokom cijelog života.

U ovom radu ću daćemo detaljniji opis ove teorije. Rad je namjenjen realizatorima nastave matematike – predavačima geometrije, na svim nivoima obrazovanja: učiteljima, nastavnicima u osnovnoj školi i profesorima u srednjoj školi.

Ključne riječi: geometrija, geometrijsko mišljenje, van Hiele-ova teorija

Mathematical Didactic Classification: C30 Cognitive processes. Learning theories

Mathematical Subject Classification (2000): 97C30 Student learning and thinking;

97C50 Theoretical perspectives (learning theories, epistemology, philosophies of teaching and learning, etc.)

1. Uvod

Geometrija se, kao nauka, prvi put pojavila u drevnom Egiptu, Babilonu i Grčkoj, u vezi sa razvojem kulture mjerenja površine tla. Otuda i potiče naziv geometrije.

U antičkoj Grčkoj, ona se naglo razvija, a do novih teorija, teorema i njihovih dokaza još se, uvijek dolazi. Geometrija je oduvijek bila vrlo cijenjena oblast matematike, i oduvijek se znalo da je za njeno poznavanje i shvatanje - potreban viši nivo mišljenja. Još u antičkoj Grčkoj ljudi su dolazili do geometrijskih problema koje nikako nisu mogli riješiti, pa se dešavalo da u tom pravcu razmišlja po nekoliko generacija posle njih - pokušavajući da uvide nešto što niko prije njih nije uspio.

Jeste li se ikad zapitali kako smo mi u stanju da imamo viziju npr. prizme ili piramide na samu pomen te riječi, i da nam to djeluje tako prirodno? Postoje tvrdnje, iskayivane od strane starijih pedagoga (i psihologa?) da to nismo mogli kad smo se rodili, ni kad smo progovorili i poceli da sagledavamo svijet oko sebe, pa cak ni mnogo kasnije. Međutim, u današnje vrijeme, mnogi istraživači⁷ matematičkih sposobnosti smatraju da se svako ljudsko biće rađa sa nekim matematičkim znanjem i uz značajno prisutne logičko-matematičke sposobnosti.⁸

Primjetivši da njihovi učenici imaju poteškoća sa učenjem geometrije, Dina i Pierre van Hiele su izgradili teoriju o tome šta se to u ljudskom mozgu dešava od

⁷ Uri Leron: *Origin of Mathematical Thinking: A Synthesis*; CERME 3 (2003), Tematik group 1, 1-8 pp

⁸ Čini se da treba prihvatiti tvrdnju istraživača ranih matematičkih sposobnosti da ljudsko biće odmah po rođenju razlikuje jedan broj (različitih) geometrijskih figura i tijela.

momenta kad on postaje sposoban da samo prepoznaje neke geometrijske oblike, pa do momenta kad je u stanju da izvede formalne dokaze za tvrdnje koje govore o nekim njihovim osobinama.

Van Hiele-ov model geometrijskog razmišljanja je centriran na hijerarhijski niz nivoa, te je korišten za opisivanje učeničkog razmišljanja u nekoliko studija tokom proteklih nekoliko decenija. Pierre van Hiele je to prvobitno zamislio na pet nivoa, koje su označene kao vizualno, opisno, apstrakcija, dedukcija i rigor. Učenici koji se oslanjaju na holističke, proto-karakteristične primjere, kao što je kvadrat sa stranicama koje imaju horizontalne i vertikalne orijentacije, bili bi karakteristika za prvi (vizualni) nivo. Za učenike koji bi mogli jasno objasniti, pogadajući po svojim svojstvima, koja figura sa različitim orijentacijama može i dalje da bude kvadrat, bi se moglo reći da su obilježje drugog (deskriptivnog) nivoa. Kada su u mogućnosti da dovedu u vezu individualna svojstva, na način da primijete da je kvadrat i poseban pravougaonik i poseban romb, oni ispoljavaju osobine koje pripadaju trećem nivou (apstrakcija) zaključivanja. Na ovaj način njihovo rasudjivanje postaje sve sažetije na svaki viši nivo razmišljanja. Naknadna istraživanja se odnose na model koji je također uključio učenike starijih godina i/ili mlađe studente. Dina je otkrila da sekundarna učenička /studentska razmišljanja, govoreći uopšteno, nisu na nivou potrebnom za formalni aksiomatički kurs o euklidskoj geometriji.

Dalja istraživanja su uticala na značajno modifikovanje ove teorije tokom godina. Detaljnije rečeno, ovi nivoi se više ne posmatraju kao diskretne faze koje učenici / student prolaze i ostavljaju iza sebe kao svoje razvijeno mišljenje. Nivoi bi se sada trebalo da posmatraju kao međusobno inkorporani.. Dakle, dok se viši sloj izgrađuje, njegova nastajanja se ne eliminišu. Učenička / studentska zaključivanja na višem nivou i dalje mogu imati pristup različitim vrstama razmišljanja povezana sa nižim nivoima

Istraživačko fokusiranje na niže nivoe je također dovela do pojave nedoumica u vezi sa brojem nivoa u modelu. S jedne strane, istraživanja nad mladjom djecom su naznačila stabilni, "pred-shematski" nivo ispod postojećeg vizualnog nivoa. S druge strane, fokus istraživača na donjem kraju prvobitnog modela dovelo je do spajanja na višim nivoima, što je rezultovalo stravarima verzije modela koji se sastoje od samo tri nivoa. Tu verziju van Hiele-ovog modela koncentrisanu na različite vrste mišljenja koji karakterišu syncretic, opisni i apstraktni nivo mišljenja. Tip razmišljanja na nivou syncretic je primarno vizualni, dok je na opisnom nivou govorni. Apstraktni nivo, što uključuje treći i više nivoe van Hiele modela, uključuje razmišljanja koja služe za povezivanje. Dakle, zaključivanje, kojima se koriste učenici / studenti, je kompleksno, a ne preslikava se na čisti niz različitih tipova rasuđivanja.

2. Van Hiele-ovi nivoi razumjevanja geometrije

Kao što je već pomenuto, postoji pet novoa razumijevanja geometrije - koje su van Heile-ovi označili brojevima od nula do četiri. Američki istraživači su, kasnije, prenumerisali nivoe, označivši ih brojevima od jedan do pet, da bi nulom označili nivo učenika koji uopšte ne prepoznaju oblike.

U narednom dijelu ćemo navesti koji su to nivoi, i šta ih karakteriše.

Nivo 0 - nivo *vizuelizacije*. Učenici na tom nivou svoje misli baziraju, i na osnovu njih donose odluke - isključivo na osnovu percepcije, bez poznavanja bilo kakvog razloga. Oni su u stanju da prepoznaju geometrijske likove, kao što su: trougao, četvorougao ili krug, ali njihove osobine im nisu poznate, i često vjeruju da je nešto upravo takvo samo na osnovu jednog primjera.

Nivo 1 - nivo *analiziranja*. Učenici, na ovom nivou, vide figure kao skup svojstava, i uče termine kojim ih opisuju, ali još uvijek ne mogu da uvide vezu između njih. Kada opisuju neki objekat, razmišljajući na ovom nivou, oni nabrajaju sve njegove osobine, ali ne mogu da razgraniče - koje su od njih potrebne, a koje dovoljne da ga opišu. Oni mogu da izvedu zaključke induktivno, na osnovu nekoliko primjera, ali još uvijek ne mogu da koriste dedukciju.

Počinju da vjeruju da, ako neki lik pripada klasi kvadrata, onda on ima sve osobine te klase, kao što su, na primjer : međusobno normalne dijagonale, stranice jednake dužine, pravi uglovi, linije simetrije i druge osobine.

Nivo 2 - nivo *apstrakcije*, ili kako ga neki nazivaju, nivo neformalne dedukcije. Učenici spoznaju odnose među osobinama geometrijskih oblika, i, na osnovu toga, odnose među samim geometrijskim oblicima. Počinju razmišljati deduktivno, ali ne razumiju, još uvijek, pravilo i značenje formalne dedukcije.

Na ovom nivou, učenici počinju da razmišljaju o tome šta je potrebno, a šta dovoljno da se neki geometrijski lik opiše. Na primjer, znaju da je dovoljno da četvorougao, koji ima sve stranice jednake, ima jedan prav ugao, da bi bio kvadrat.

Nivo 3 - nivo *dedukcije*. Učenici mogu da izvedu dokaze srednjoškolskog nivoa, izvedu zaključke iz prethodno poznatih tvrdnji, razumiju značenje definicija i aksioma, i shvataju značenje potrebnog i dovoljnog uslova.

Učenici su u mogućnosti da upotrebljavaju apstraktne pojmove, i da izvedu zaključke koji su zasnovani više na logici nego na intuiciji.

Nivo 4 - nivo *strogosti*. Na ovom nivou, stariji učenici / mladi studenti su u mogućnosti da razumiju konzistentnost, nezavisnost i kompletnost aksiomatskog sistema, i da poredi matematičke sisteme. Takođe, mogu da razumiju indirektno dokazivanje - dokazivanje korišćenjem kontrapozicije, te da razumiju geometrijske sisteme koji nisu Euklidski (kao što je na primjer, sistem geometrije Lobačevskog kod koje su geometrijski likovi smješteni na sferu, a ne u ravan - kao kod Euklidske geometrije).

Kako postoji pet nivoa mišljenja, van Hiele-ovi preporučuju pet faza sa odgovarajućim postupcima koji bi učenicima pomogli u savladavanju datih nivoa. To su faze:

1. *informisanja*: U ovoj fazi učenici / studenti se upoznaju sa materijalom. Kroz diskusiju, nastavnik - predavač uviđa šta su učenici dosad naučili o određenoj temi i upoznaje ih sa temom.;

2. *usmjerenog vođenja*: Učenicima / studentima se daje da nešto prave, mjere ili da obavljaju slične vrste poslova - koji će im omogućiti da kroz njih otkriju odnose, koji im dotad nisu bili poznati, ili su bili nedovoljno jasni;

3. *objašnjavanja*: Učenici / studenti pokušavaju svojim riječima objasniti ono do čega su došli kroz prethodni rad, a nakon toga, nastavnik - predavač ih upućuje na termine koji se upotrebljavaju u matematici - da to opišu;

4. *slobodnog usmjeravanja*: Ovo je faza u kojoj se primjenju dotadašnja znanja za rješavanje konkretnih problema; i

5. *integriranja*: U ovoj fazi se objedinjavaju prethodna znanja, i te obrađene informacije pamte.

Red nivoa mišljenja kojim učenici prolaze je invarijantan, tj. na putu do najvišeg nivoa ne može se preskočiti ni jedan prethodni, odnosno preći nivo n , ako prije toga nije savladan nivo $n-1$. Ovo je potvrđeno, na primjer, istraživanjima Burger i Shaughnessy⁹, (1986); Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R.¹⁰ (1988).

Burger and Shaughnessy (1986) su iznijeli teoriju - da nivoi nisu diskretni, kao što je to ranije bilo navedeno. Učenici mogu da se nađu na prelazu između nivoa, i njihov nivo mišljenja da bude različit - zavisno od teme koju proučavaju. Na primjer, ako je učenik više vremena i truda posvetio proučavanju trougla - i dostigao nivo dva na tom području - nego četvorougla - na kom je još uvijek na nivou jedan, onda on može da razmišlja na više sofisticiran način o trouglu nego, na primjer, o trapezu, ali mu to ipak olakšava da i u drugim oblastima pređe na nivo dva - jer je on već navikao da traži odnose među svojstima nekih likova.

Teško bi bilo odrediti vrijeme koje je potrebno da se pređe iz nekog nivoa u sljedeći, jer je bitno samo aktivno učenje i rad na razumijevanju materijala, a nekom je za to potrebno više, a nekom manje vremena. Međutim, Dina je 1957. godine iznijela teoriju - da je potrebno 20 lekcija - za prelaz sa nivoa nula na nivo jedan, i 50 lekcija - sa nivoa jedan na nivo dva, ako se radi sa dvanaestogodišnjacima.

Van Hiele-ova teorija govori o tome - da se djelotvorno učenje odvija samo kad učenici aktivno doživljavaju ono o čemu uče, i uključuju se u raspravu. Frontalni oblik rada i, sa druge strane, pasivnost i memorisanje učenika ne doprinose napretku. Nastavnikov zadatak je da omogući učenicima da steknu određena iskustva - da bi kasnije mogli o njima i da diskutuju. Naravno, to mora učiniti u skladu nivoom koji učenik prolazi.

⁹ Burger, W.F., & Shaughnessy, J.M. (1986). *Characterizing the van Hiele levels of development in geometry*. Journal for Research in Mathematics Education, 17, 31-48.
Shaughnessy, J.M., & Burger, W.F. (1985). *Spadework prior to deduction in geometry*. Mathematics Teacher, 78, 419-428.

¹⁰ Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Monograph No. 3 of the Journal for Research in Mathematics Education. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Svaki nivo mišljenja, osim što ima posebnu interpretaciju istog pojma, on ima i poseban jezik.

Većina srednjoškolskih profesora razmišlja na trećem ili četvrtom nivou, a učenici koji upisuju prvi razred srednje škole su na prvom ili drugom nivou razmišljanja (Marguerite Mason)¹¹ Profesor mora da vodi računa o tome da upotrebljava riječi koje pripadaju jeziku koji odgovara nivou mišljenja učenika, jer ga, u suprotnom, oni neće razumjeti. Pošto ne razumiju ono što im se predaje učenici će pokušati da memorišu gradivo. Međutim, kao i sve što se uči memorisanjem i bez ikakvog razmišljanja, biće vrlo brzo zaboravljeno, a i učenici neće biti u stanju da primjenjuju naučeno.

Interpretacija van Hiele-ovi nivoa prema objektu misli ima perspektivu ne samo da vraća izvornu prirodu modelu, već takodjer ukazuje kako se model može proširiti i na više nivoe mišljenja a koje su izgubljene u modelu koji karakteriše vrste mišljenja. Tablica 1 pokazuje nove objekte misli i za koje se smatraju da studenti razvijaju u skladu sa ovim karakteristikama

van Hiele-ovi nivoi	Objekti misli
1 Vizualni	Jasnoća figura
2 Opisna	Pojedinačne osobine figura
3 Apstrakcija	Veze između osobina
4 Dedukcija	Povezivanje veza u sistem
5 Rigor	Veze između sistema

Tablica 1. Objekti misli karakteristični za pet van Hiele-ovih nivoa

Treba imati na umu da eksplicitni objekt misli, karakterističan za nivo 3, je implicitan na nivou 2, koji je pak, sa svoje strane, implicitan na nivou 1. Dakle, rast od nivoa 1 do nivoa 2, a zatim na nivo 3 mišljenja uključuje naknadne smjene od implicitnog do eksplicitnog mišljenja koji se odnosi na složenost predmeta misli. van Hiele je naglasio ovaj aspekt modela kada je pokušava odrediti učenički / studentski nivo mišljenja:

- (a) *Na svakom nivou se pojavljuje na neuobičajen način što je prirodno za određeni nivo.*
- (b) *Na osnovnom nivou, figure se utvrđuju na osnovu njihovih osobina, ali neko na tom nivou razmišljanja nije svjestan tih svojstava.*

Ovaj odnos između nivoa, pri čemu je svaki ugniježđen unutar sljedećeg, teče, naravno, iz karakterizacije objekta misli. Dina Gendolf takoder objašnjava zašto učenik / student, koji elementarno zaključuje, ima nivo pristupa na "nižim" nivoima, ali ne nužno na "višim" nivoima iznad tih. Osim toga, za opise svakog pojedinog nivoa kasnija istraživanja su identifikovala određeni broj indikatora za

¹¹ Marguerite Mason, *The van Hiele Levels of Geometric Understanding*; Professional Handbook for Teachers, GEOMETRY: EXPLORATIONS AND APPLICATIONS, Copyright © McDougal Littell Inc.

prva četiri nivoa. Na primjer, Burger i Shaughnessy (1986) su dali devet pokazatelja za treći stepen:

1. *Formiranje potpune definicije vrste oblika.*
2. *Sposobnost za izmjenu definicije i mogućnost da se odmah prihvate i koriste definicije novih koncepata.*
3. *Jasno pozivanje na definicije.*
4. *Sposobnost da se prihvate ekvivalentni oblici definicije.*
5. *Prihvatanje logično djelimičnih vrsta oblika, uključujući klasu inkluzija.*
6. *Sposobnost da bismo sortirali oblike prema različitim preciznim matematičkim atributima.*
7. *Jasno korištenje "ako, potom" izvještaja.*
8. *Sposobnost da se obrazuju oblici deduktivanih argumenata, koji implicitno koriste takve logičke forme kao pravilo (ako p implicira q i q implicira r , onda p implicira r) i Pravilo izdvajanja (modus ponens).*
9. *Konfuzija između uloge aksioma i teorema.*

Takvi pokazatelji imaju određeno istraživačko sredstvo kojim bi mogli okarakterizovati studentova razmišljanja u odgovoru na razne geometrijske zadatke. Kao i sa opisima za svaki nivo, perspektiva objekta misli je također očita u nivoima tih pokazatelja. Detaljnije rečeno, nekoliko pokazatelja trećeg nivoa koji uključuju formiranje i mijenjanje definicije, kao i prihvatanje ekvivalentne definicije. Imajte na umu da ovo odražava razmatranje definicije ne samo kao skup osobina, što će ukazati na razmišljanje na drugom nivou, ali kao objekti kreirani iz odnosa između svojstava. U odnosu na to, izričita upotreba "ako, potom" izjavama naglašava kako studenti koriste jezik koji može pomoći da ukazuje na kompleksnost njihovih objekta misli. Isto tako kao što se vidi na posljednjem pokazatelju, studenti koji imaju zaključivanje karakteristično trećem nivou vide ove odnose, ali ne razumiju kako oni mogu imati različite uloge. Dakle, oni ne razmišljaju o tome kako od definicije, teoremi i aksioma povezati formalni aksiomatski sistem.

Navedene razlike između trećeg i četvrtog nivoa razmišljanja odgovara kako Tall¹² (1991) daje razliku između osnovnih i naprednih matematičkih razmišljanja. Na osnovnoj nivou, definicije određuju njihove osobine, ali su na naprednom stepenu svojstva vide kao posljedica načina na koji su definisani. Ulogu aksioma, za razliku od onoga teorem, je svjestan tek nakon što ih studenti budu vidjeli kako se odnose, tj. kako su povezani. Ovaj pomak karakteriše "tranziciju koherentnosti elementarne matematike za posljedicu napredne matematike, na temelju apstrakcije koju pojedinac mora konstruisati kroz dedukciju iz formalne definicije" (Tall, 1991). Sa ovim u vidu, razmotriti pet pokazatelja četvrtog nivoa razmišljanja, kao što su dali Burger i Shaughnessy:

¹² Tall, D. (1991). *The psychology of advanced mathematical thinking*. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, pp. 3-21. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

1. *Razjašnjavanje nejasnih pitanja i problema u vezi zadataka na precizan jezik.*
2. *Učestalo nagađanje i pokušaji da se pokažu pretpostavke deduktivno.*
3. *Korištenje dokaza kao konačni autoritet u odlučivanju istine matematičkih teorema.*
4. *Razumjevanje uloge komponenti u matematičkom govoru, kao što su aksiomi, definicije, teoreme, dokaz.*
5. *Prihvatanje postulata Euklidove geometrije.*

Razlika između ovih pokazatelja i onih prethodno citiranih za treći nivo može se doživljavati kao pomak prema više formalnom metodu rasudjivanja. Zaista, treći nivo van Hiele-ovog modela je često bio povezan sa "neformalnim" zaključivanjem koji je preslikan kako bi se "formalna" dedukcija vidjela na četvrtom nivou. Iako je to istina, ona je zamjenski obrazac za sadržaj, a nije adresa sa relevantnim predmetom misli. Glavni pokazatelj u četvrtom nivou je pojava novog objekta misli, tj. dokaza. Kao što je navedeno u trećem indikatoru, pravi problem je dobijanje matematičkim rezultatima iz dokaza, tj. da je povezan odnosima unutar formalnog aksiomatskog sistema. Na primjer, izjavu o Pitagorinom teoremu se može vidjeti kao zanimljiv odnos između dijelova pravouglog trougla. Iz ove perspektive, prethodna izjava je treći nivo objekta misli. A dokaz Pitagorinog teorema je, s druge strane, formalni odnos među ostalim objektima, kao što su stranica-ugao-stranica, aksiom, i teorema o spoljašnjem uglu. Iz ove perspektive, istina je izjava, a posljedica je dokaz, pa je dokaz unutar četvrtog nivo objekta misli. Dakle, studenti koji imaju problema s dokazima imaju zato, jer pogadjaju da su "metode" povezane s formalnim rasudjivanjem, bez gledanja na stvari koji proizlaze iz odnose, kao objekte eksplicitnih misli, tj. studenti su, i dalje, na trećem nivou mišljenja.

Neke povezanosti u istraživanju vezanom za definisanje

Freudenthal¹³ (1973) i de Villiers¹⁴ (1999) su naglasili ulogu u razvoju definisanja geometrijskih mišljenja kod studenata. Utvrdili su da samo znanje definicije objekta sebi ne znači da studenti razumiju šta predstavlja definicija. To se ogleda u istraživanjima u učionici, koju je za istraživanje osnovala Keiser¹⁵ (2000), pri kojima je razmatrala pitanje, ako "službenom determinisanju koncepta srednje škole učenici još nisu spremni koristiti definicije u svrhu

¹³ Freudenthal H. (1973.) *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, the Netherlands: Reidel.

¹⁴ de Villiers M. (1999.) *Rethinking proof with the geometer's sketchpad*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

¹⁵ Keiser J. (2000.) *The role of definition*. Mathematics teaching in the middle school, 5(8)

formalnog rasudjivanja, tada smo morali njihovo razumijevanje ograničavati tim konceptima?". Njezina istraživanja ukazuju na to da bi trebalo da - Umjesto davanja "udžbenika definicija" učenicima / studentima učenici / studenti treba prvo da steknu široko iskustvo sa pojmovima kao što je na primjer ugao. Zatim, preko rasprave u razredu, svaki student bi mogao biti uključen u proces definisanja tako da vrši poofilisanje značenja ranije stečenih pojmova. Od interpretacije objekata misli, aktivan proces definisanja se vidi tako da pomaže učenicima / studentima da razmotre definicije kao treći nivo objekta misli koji uključuju odnose na širokom planu slike.

Freudenthal pravi razliku između dva procesa definisanja. Opisno definisanje uključuje izabrani minimalni, ali dovoljan skup uslova koji opisuje poznati objekt. Konstruktivno definisanje, s druge strane, uključuje izgradnju novih objekata i ispitivanje promjene na poznate definicije. "Dok je glavna svrha ili funkcija opisnog definisanja sistematizovati postojeće znanje, glavna funkcija pri upotrebi konstruktivnih definicija je proizvoda novih znanja" (de Villiers, 1999)

Sposobnost da formulišu opisne definicije ukazuje na treći nivo zaključivanja, ali njihova uloga u sistematizovanju znanja je mnogo naprednija i prešutno podrazumijeva priznavanje viših formalnih sistema.

3. Šta nastavnici-predavači mogu uraditi da bi izbjegli prethodno navedeni problem?

Poželjno je, prije početka kursa, ispitati - na kom nivou se učenici nalaze - da im se ne bi predavalo gradivo koje nisu u stanju usvojiti, čak i ako se potruže i slušaju. To se može uraditi pomoću testova, koji su za to namijenjeni. Mnogo je praktičnije, ako već predavač radi sa učenicima, da ispita njihov nivo mišljenja - tako što posmatra njihove reakcije na postavljenje zadatke, ili uzima u obzir koje riječi jezika koriste za opisivanje geometrijskih pojmova.

Burger i Shaughnessy (1986) su korištenjem intervjua baziranog na zadacima, došli do nekih karakteristika mišljenja učenika, a u nastavku će biti prikazane karakteristike prva četiri nivoa.

Učeninike na nivou nula - karakterišu sledeće osobine:

- često koriste nerelevantna vizuelna svojstva za identifikaciju i opis geometrijskih figura;
- obično likove pamte po onim primjercima kakve su sretali ranije, te ih lako može zbuniti sama rotacija tih likova;
- nedosljednost u klasifikaciji likova (npr. klasifikacija koja se oslanja na nevažan podatak koji im je, samo naizgled, ili u pojedinim primjerima - zajednički),
- nepotpune definicije likova, često zasnovane samo na potrebnim uslovima na osnovu vizuelnog dojma.

Na prvom nivou mišljenja pomenute su sljedeće karakteristike:

- eksplicitna poređenja likova na osnovu njihovih osnovnih osobina,
- izbjegavanje inkluzije između različitih klasa likova,
- razvrstavanje likova samo na osnovu jednog svojstva koje može npr. biti broj stranica, a druga svojstva poput simetrije, uglova i dijagonala se ignorišu,

- opisivanje objekta na osnovu mnoštva svojstava umjesto samo pomoću dovoljnih svojstava,
- odbacivanje definicija drugih ljudi, npr. definicija iz knjiga, i favorizovanje lične definicije,
- vjeruju da je nešto tako ako se pokaže da vrijedi na par primjera.

Nivo tri karakteriše sljedeće:

- formiranje ekonamične definicije za objekte,
- sposobnost prevođenja nekompletne definicije u kompletnu, i više spontano prihvatanje definicije i korišćenje u novim situacijama,
- prihvatanje više ekvivalentnih definicija za isti oblik,
- hijerarhijska klasifikacija figura,
- eksplicitno korišćenje logičke forme "ako... onda", kao i implicitno korišćenje pravila *modus ponens*.
- nepotpuna jasnost definicija, dokaza i korištenja aksioma.

I, na kraju, nivo četiri karakteriše:

- razumijevanje pojedinih funkcija aksioma, definicija i dokaza i
- dolaženje do sopstvenih zaključaka, i pokušavanje da se isti i dokažu.

Jedna od najsloženijih i najuticajnijih savremenih teorija kognitivnog razvoja je teorija čiji je tvorac švajcarski psiholog Žan Pijaže¹⁶. Pijažov cilj je bio da opiše razvojni period dječijeg razmišljanja u različitim domenima, među kojima su i prostor i geometrija.

Po njegovom mišljenju, razvoj inteligencije prolazi kroz četiri glavna stadijuma, ili perioda, čiji je redosljed postojan i nepromenljiv, a to su: 'senzomotorni period' (od rođenja do pojave simboličke funkcije), 'preoperacioni period' (od 1-6 do 7-8), 'period konkretnih operacija' (od 7-8 do 11-12) i 'period formalnih operacija' (od 11-12 do 15-16). Nužnost redosljeda javljanja ovih stadijuma ne znači da su oni nasljedno predodređeni ili preformirani, već je on i proizvod aktivnosti subjekta koji je u potpunosti ovladao mogućnostima jednog stadijuma, i koji ga prevazilazi prelaskom na sljedeći.

Pijaže smatra - da logičke sekvence, u koje djeca organizuju ideje o geometriji, počinju sa topološkim relacijama, zatim projektivnim relacijama, i, na kraju, Euklidskim relacijama.

Topološki odnosi se vežu samo za odnose unutar figura ili konfiguracija, dok se projektivni prostor bavi različitim tačkama gledista sa kojih se objekat posmatra. Euklidski prostor se bavi međusobnim odnosima među figurama.

Na primjer, djeca mogu da topološki transformišu figure njihovim skupljanjem i razvlačenjem. Njihova osnovna svojstva neće ostati nepromijenjena (npr. konkavan zmaj će postati trougao).

Projektivni odnosi se bave promjenama u izgledu figura koje se posmatraju iz različitih uglova (npr, kako bi izgledao zmaj ako bi se posmatrao odozdo, a kako gledan pod nekim uglom).

¹⁶ Jean William Fritz Piaget, (9 avgust 1896 à Neuchâtel – 16 septembar 1980 Genève)

Ako djeca mogu da shvate da su dva trougla podudarna jer su njihove stranice i uglovi podudarni, te njihove ideje su bazirane na Euklidskim odnosima.

Druga njegova velika teorija govori o tome da je djetetova reprezentacija prostora razvijena kroz samu njegovu interakciju sa okruženjem.

Jedna od osnovnih razlika između van Hiele-ove i Pijažeove teorije je - da van Hiele opisuje nivoe razmišljanja, a Pijaže opisuje faze razvoja.

Zatim, Pijaže smatra da je najranije djetinjstvo glavni period cjelokupnog razvoja djeteta, dok kod Hiele-a - razvoj zavisi isključivo od rada na usvajanju novih znanja, i mogu se desiti u bilo kom životnom periodu.

U oba slučaja, teoretičari smatraju da je nedovoljno podržana ideja - da je sposobnost dobrog objašnjavanja veoma važna za dobro poučavanje. Clements i Battista¹⁷ (1992) su iznijeli misljenje da su oba teoretičara izbjegli dvije perspektive u nastavi. Prva se odnosi na ideju da, kada je viši nivo dostignut, niži nivo posmatramo kao inferioran, a druga, na činjenicu - da učenike treba forsirati da što brže prelaze na nove nivoe kad su prethodni stabilizovani. Drugačije rečeno, ni van Hiele, niti Pijaže, nisu se zalagali da se razvoj ubrza.

Pandiscio i Orton¹⁸ (1998) su još naglasili da je svrha ove dvije teorije drugačija. Dok je, van Hiele, pokušavao da pomogne predavačima u davanju instrukcija, opisivanjem nivoa mišljenja, Pijaže se više zadržavao na opisu napretka u procesu mišljenja, i na tome - kada se može očekivati taj napredak.

Clements i Battista su takođe istakli da postoje razlike u mišljenju ove dvojice teoretičara o tome - kako se razvija mišljenje učenika o razlozima zbog kojih neka tvrdnja važi, i njihovim dokazima. Van Hiele bi rekao da napredak zavisi od rasta sposobnosti razumijevanja geometrijskih odnosa, tj. da su studenti spremni da dokažu nešto ako je njihov nivo poznavanja i razumijevanja tog materijala na odgovarajućem nivou. Pijaže, ipak, smatra da - razumijevanje sadržaja nije vezano za djetetovu sposobnost formalne argumentacije.

U svijetu vlada velika zainteresovanost za ovu temu i mnogi ljudi pokušavaju da je razrade, ispituju dosadašnje zaključke, i otkriju nove¹⁹. Kod nas, još uvijek vlada nezainteresovanost za tu temu.

Ovaj rad bi trebalo da navede bar nekolicinu ljudi, koji budu slučajno ili namjerno, dosli do njega, zainteresovati – da, bar malo, razmisle o procesu učenja geometrije.

3. Literatura

Korištena ili konsultovana pri pisanju ovog teksta

¹⁷ Clements, D.H. and Battista, M.T. (1992): *geometry and spatial reasoning*; In: D.A.gauws (editor): *Handbook of research in mathematical teaching and learning* (pp. 420-464), Reston, VA, National Council of Theachers of Mathematics

¹⁸ Pandiscio, Eric; Orton, Robert E, *Geometry and Metacognition: An Analysis of Piaget's and van Hiele's Perspectives*. Focus on Learning Problems in Mathematics, v20 n2-3 p78-87 Spr-Sum 1998

¹⁹ Na primjer, 2006. godine odbranje su dvije doktorske disertacije na temu van Hiele'ove teorije (Vidjeti publikacije [3] i [4] navedene u Literaturi.)

- [1] D.H. Clements, (2003). *Teaching and Learning Geometry*. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: NCTM.
- [2] M. de Villiers; *Research Evidence on Hierarchical Thinking, Teaching Strategies and the Van Hiele Theory: Some critical comments*, dostupno na internet-stranici <http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/homepage4.html>
- [3] Rebekah Genz: DETERMINING HIGH SCHOOL GEOMETRY STUDENTS', GEOMETRIC UNDERSTANDING USING VAN HIELE LEVELS: IS THERE A DIFFERENCE BETWEEN STANDARDS-BASED CURRICULUM STUDENTS AND NONSTANDARDS-BASED CURRICULUM STUDENTS? Department of Mathematics Education, Brigham Young University, August 2006
- [4] Kathleen Chesley Knight: AN INVESTIGATION INTO THE CHANGE IN THE VAN HIELE LEVELS OF UNDERSTANDING GEOMETRY OF PRE-SERVICE ELEMENTARY AND SECONDARY MATHEMATICS TEACHERS; The Graduate School, The University of Maine May, 2006
- [5] Marguerite Mason, *The van Hiele Levels of Geometric Understanding*, dostupno na internet adresi http://www.coe.tamu.edu/~rcapraro/Graduate_Courses/EDCI%20624%20625/EDCI%20624%20CD/literature/van%20Hiele%20Levels.pdf
- [6] Eleanor Louise Pusey, *The van Hiele model of reasoning in geometry*, Raleigh (2003), dostupno na internetu i može se preuzeti na <http://www.lib.ncsu.edu/theses/available/etd-04012003-202147/unrestricted/etd.pdf>
- [7] Noraini Binti idris Tay Bee Lian (2008): *Teaching and learning of geometry: Problems and prospects*; Masalah Pendidikan Jilid, 27, 165-178
- [8] D. A.Romano: *O motivima izučavanja matematičkog mišljenja*; Nastava matematike (Beograd), LIII (3-4)(2008), 1-11
- [9] Zalman Usiskin; *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*, The Univesity of Chicago (1982), dostupno na internet adresi http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/2e/57/ed.pdf
- [10] P.M. van Hiele, (1986). *Structure and insight, a theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
- [11] P M. van Hiele, (1956). *The child's thought and geometry*, trans. by R. Tischler. Bulletin de l'association des professeurs de mathematique de l'enseignement public, 38^e annee N^o 198, pp. 1-10.
- [12] D. van Hiele-Geldof, (1957). *The Didactics of Geometry in the Lower Class of the Secondary School*. English summary (by Dina van Hiele-Geldof) of De didaktiek

van de Meetkunde in de eerste klass van het V.H.M.O. Doctorial dissertation, University of Utrecht.

- [13] P.M. van Hiele, (1957). *The Problem of Insight, in Connection With School-children's Insight Into the Subject Matter of Geometry*. English summary (by P.M. van Hiele) of De Problematiek van het Inzicht Gedemonstreed wan het Inzicht von Schoolkindren in Meetkundeleerstof. Doctorial dissertation, University of Utrecht.

SUMARY Dina and Pierre van Hiele are two Dutch educators who were concerned about the difficulties that their students were having in geometry. This concern motivated their research aimed at understanding students' levels of geometric thinking to determine the kinds of instruction that can best help students.

The five levels that are described below are not age-dependent, but, instead, are related more to the experiences students have had. The levels are sequential; that is, students must pass through the levels in order as their understanding increases. The descriptions of the levels are in terms of “students” – and remember that we are all students in some sense.